

Lemmes de multiplicités et constante de Seshadri

Michael Nakamaye* et Nicolas Ratazzi [†]

Résumé : On démontre dans cet article un raffinement des lemmes de multiplicités de Philippon, essentiellement dans le cas particulier où l'on dérive dans toutes les directions. L'amélioration est rendue possible grâce à un point de vue plus géométrique et notamment par l'apparition nouvelle dans ce contexte de la notion de constante de Seshadri.

Abstract : We establish an improvement of Philippon's zero estimates primarily in the multiplicity setting. The improvement is made possible by a more geometric approach and in particular the use of Seshadri constants.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Introduction	1
1.2	Énoncé des résultats	4
2	Les dérivations et le théorème de Bézout	6
2.1	Dérivations	6
2.2	Théorème de Bézout	7
3	Preuve du point 1. du théorème 1	7
4	Fin de la preuve du point 1. du théorème 1	11
5	Preuve du point 2. du théorème 1	12
6	Preuve du théorème 2	13
7	Cas des dérivations le long d'un sous-espace de dimension 1 dans une surface	14

1 Introduction

1.1 Introduction

On prouve dans cet article deux résultats concernant les lemmes de multiplicités. Avant d'aborder les énoncés proprement dit rappelons rapidement ce qu'est un lemme de multiplicités et dans quel contexte on rencontre ce type d'énoncé : il s'agit de fournir des conditions suffisantes pour qu'une

*Department of Mathematics and Statistics, University of New Mexico, Albuquerque, New Mexico, 87131, USA, nakamaye@math.unm.edu

[†]Université Paris-Sud XI, Batiment 425, 91405 Orsay Cedex, FRANCE, nicolas.ratazzi@math.u-psud.fr

section d'un fibré en droites \mathcal{L} sur une compactification équivariante lisse X d'un groupe algébrique commutatif \mathbb{G} ne puisse pas s'annuler sur un sous-schéma fini Σ donné sans être identiquement nulle. Ce type d'information qui se traduit généralement par la présence d'un sous-groupe obstruc-teur dont on majore le degré géométrique est d'usage particulièrement important en transcendance et en géométrie diophantienne et intervient également en géométrie algébrique complexe dans un contexte plus général : partant d'une variété algébrique complexe projective et lisse X , munie d'un fibré en droites ample L sur X , et $\Sigma \subset X$ un sous-ensemble fini, un lemme de multiplicités pour les données X, L, Σ consiste à majorer la multiplicité maximale que peut avoir une section non triviale $s \in H^0(X, L)$ le long de Σ . Ce problème est aussi difficile qu'important, même dans le cadre le plus simple. Par exemple, si $X = \mathbf{P}^2$, $L = \mathcal{O}_{\mathbf{P}^2}(d)$, et Σ est un ensemble de m points généraux avec $m \geq 10$, on tombe sur la conjecture de Nagata.

Deux aspects nous semblent importants dans un lemme de multiplicités : le premier est d'obtenir une bonne condition numérique concernant le degré du groupe ou de la variété obstrutrice, le second est aussi de mieux comprendre géométriquement d'où provient l'obstruction. De ce point de vue il nous semble intéressant de pouvoir identifier en terme géométrique les variétés obstrutrices. Dans cet article, nous nous intéressons aux lemmes de multiplicités dans le cadre où ils apparaissent en transcendance. Dans ce contexte, le résultat le plus important est dû à Philippon [6] (cf. également [5] pour une preuve plus géométrique, basée en partie sur celle de Philippon mais permettant également d'obtenir un résultat plus précis au niveau des constantes intervenant dans la majoration du degré du sous-groupe obstruc-teur). En utilisant des outils développés en géométrie algébrique complexe nous donnons un raffinement, dans le cas particulier où l'on dérive dans toutes les directions, des lemmes de zéros de Philippon [6]. Par ailleurs, dans le cas de dimension 2 nous obtenons également un résultat plus précis dans le cas où l'on dérive le long d'une droite (cf. le théorème 11 paragraphe 7). Enfin utilisant une preuve plus géométrique et notamment en utilisant la notion de constante de Seshadri nous donnons une information géométrique sur les sous-groupes obstrutteurs, les reliant à la notion de sous-variété exceptionnelle de Seshadri. En dimension deux le résultat est particulièrement frappant : (sous certaines conditions de taille sur l'ensemble de points Σ considéré fourni dans les données) les sous-groupes obstrutteurs sont précisément les variétés exceptionnelle de Seshadri.

Soient \mathbb{G}/\mathbb{C} un groupe algébrique commutatif de dimension $d \geq 1$, X une compactification de Serre de \mathbb{G} (cf. [8]) (une telle compactification est notamment équivariante et lisse). Si U est une sous-variété de \mathbb{G} nous noterons \overline{U} son adhérence de Zariski dans X . Soient \mathcal{L} un fibré en droites ample sur X et Γ un sous-ensemble fini de $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ contenant 0 et engendrant un groupe (nécessairement de type fini) $\Gamma_{\mathbb{Z}}$. On pose pour tout entier $S \geq 1$

$$\Gamma(0) = \Gamma \quad \text{et} \quad \Gamma(S) = \left\{ \sum_{i=1}^S x_i \mid \forall i \in \{1, \dots, S\}, x_i \in \Gamma \right\}.$$

Par ailleurs, étant donné un sous-espace vectoriel non nul \mathbb{E} de l'espace tangent à l'origine $T_0(\mathbb{G})$ et étant donné un sous-groupe algébrique H de \mathbb{G} , nous noterons

$$c_H(\mathbb{E}) := \text{codim}(\mathbb{E} \cap T_0(H), \mathbb{E}) \quad \text{et} \quad \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}) = \left(\frac{\deg_{\mathcal{L}} X}{|\Gamma(S)|} \right)^{\frac{1}{\dim \mathbb{E}}}.$$

Dans le cas où l'espace vectoriel considéré \mathbb{E} est l'espace tangent $T_0(\mathbb{G})$ entier, nous noterons simplement $\alpha(S, \mathcal{L})$ plutôt que $\alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L})$. Notons que si $D \geq 1$ est un entier, on a $\alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}^{\otimes D}) = D^{\frac{\dim X}{\dim \mathbb{E}}} \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L})$.

Nous pouvons maintenant énoncer le lemme de zéros de Philippon (dans la version précisée de Nakamaye) :

Théorème¹ *Soient S, a_1, \dots, a_{d-1} des entiers strictement positifs ordonnés de façon décroissante et T un entier strictement positif. Soient $D \geq 1$ un entier, \mathbb{E} un sous-espace vectoriel de l'espace*

¹Notons que l'énoncé classique de Philippon tel qu'on le trouve dans son article [6] peut a priori sembler légèrement moins général puisqu'il suppose $S = a_1 = \dots = a_{d-1}$. En fait il est immédiat de voir que l'énoncé ci-dessus se déduit de celui obtenu avec $S = a_1 = \dots = a_{d-1}$.

tangent à l'origine $T_0(\mathbb{G})$ et σ une section non nulle de $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$ s'annulant sur l'ensemble $\Gamma(S + a_1 + \dots + a_{d-1})$ le long de \mathbb{E} à un ordre au moins $dT + 1$. Alors il existe un sous-groupe algébrique H , différent de \mathbb{G} , tel que

$$\max\{1, T\}^{c_H(\mathbb{E})} \text{Card}(\Gamma(a_{d-1}) + H/H) \deg_{\mathcal{L}}(\overline{H}) \leq D^{\dim X - \dim H} \deg_{\mathcal{L}}(X).$$

Le sous-groupe H est appelé sous-groupe obstruteur.

Remarque 1. Dans la pratique en transcendance, le fibré en droites ample \mathcal{L} est simplement la donnée d'un plongement de la variété X dans un espace projectif. C'est une donnée du problème. Dans une preuve de transcendance on construit une section de "degré D " relativement à \mathcal{L} (autrement dit un élément de $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$) nulle à un grand ordre T sur un certain ensemble Σ et un lemme de multiplicités consiste essentiellement à obtenir une majoration non triviale de T en fonction de D .

Dans la suite nous ferons l'hypothèse restrictive suivante qui justifie dans le titre le choix du terme *lemme de multiplicités* plutôt que *lemme de zéros* :

Hypothèse : $T \geq 1$.

Sous cette hypothèse, la conclusion du théorème précédent peut être reformulée sous forme d'une dichotomie :

1. Si $T \leq \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}^{\otimes D})$ alors le groupe trivial $\{0\}$ est obstruteur :

$$T^{c_{\{0\}}(\mathbb{E})} |\Gamma(S)| \leq D^{\dim X} \deg_{\mathcal{L}}(X).$$

2. Sinon, il existe un sous-groupe algébrique H , différent de \mathbb{G} , tel que

$$T^{c_H(\mathbb{E})} \text{Card}(\Gamma(a_{d-1}) + H/H) \deg_{\mathcal{L}}(\overline{H}) \leq D^{\dim X - \dim H} \deg_{\mathcal{L}}(X).$$

Notons que dans cette seconde partie de l'alternative rien ne dit que le groupe H ne peut pas être le groupe trivial. Une des choses que nous faisons également dans cet article est de montrer que sous certaines conditions, on peut assurer que H est non trivial.

Cette formulation à l'avantage de bien indiquer que dans tous les lemmes de multiplicités ($T \geq 1$), on peut en fait supposer que

$$T > \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}^{\otimes D}),$$

ce que l'on fera désormais ; l'autre cas étant en fait trivial (rappelons que la philosophie des lemmes de multiplicités est la suivante : partant d'une section qui s'annule à un grand ordre en un certain nombre de points suffisamment bien répartis, on montre que l'ordre ne peut en fait pas être trop grand. Si l'on part d'un ordre d'annulation $T \geq 1$ qui est déjà petit, il n'y a, du point de vue des lemmes de multiplicités, rien de plus à dire).

L'objectif de cet article est de donner des informations supplémentaires sur le sous-groupe obstruteur dans le cas particulier où l'on fixe l'espace des dérivations à l'espace tangent $T_0(\mathbb{G})$ tout entier, plutôt qu'à un sous-espace vectoriel quelconque de celui-ci. Dans ce cas nous montrons que l'on peut légèrement affaiblir l'hypothèse sur l'ordre d'annulation de la section σ considérée tout en obtenant une information plus précise sur le groupe obstruteur. Par ailleurs, dans le cas où le groupe $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ engendré par Γ n'est pas un groupe de torsion, on donne une condition numérique sur les paramètres a_i assurant que le groupe obstruteur H est différent du groupe trivial réduit à l'élément neutre. En particulierisant la situation en dimension 2 nous montrons qu'une condition numérique plus faible est suffisante dans ce cas. Enfin, toujours dans le cas particulier de la dimension 2, nous expliquons au paragraphe 7 (théorème 11) comment faire également fonctionner notre approche dans le cas d'un espace de dérivations de dimension 1 (inclus dans l'espace tangent de dimension 2).

1.2 Énoncé des résultats

Définition 1. Soient X/\mathbb{C} une variété algébrique, irréductible et projective, et \mathcal{L} un fibré en droites ample sur X . Pour tout ensemble fini $\Gamma \subset X$, la *constante de Seshadri* $\varepsilon(\Gamma, \mathcal{L})$ est définie par

$$\varepsilon(\Gamma, \mathcal{L}) = \inf_{C \subset X, C \cap \Gamma \neq \emptyset} \frac{\mathcal{L} \cdot C}{\sum_{x \in \Gamma} \text{mult}_x C},$$

où C décrit les courbes irréductibles de X contenant au moins un point de Γ .

On note que $\varepsilon(\Gamma, \mathcal{L}^{\otimes D}) = D\varepsilon(\Gamma, \mathcal{L})$. Par ailleurs rappelons (cf. par exemple [4] p. 271 Proposition 5.1.9) que pour toute sous-variété irréductible V de X , de dimension non nulle et contenant au moins un point de Γ , on a

$$\varepsilon(\Gamma, \mathcal{L}) \leq \left(\frac{\mathcal{L}^{\dim V} \cdot V}{\sum_{x \in \Gamma} \text{mult}_x V} \right)^{\frac{1}{\dim V}}. \quad (1)$$

Notamment en appliquant ceci avec $V = X$ on obtient :

$$\varepsilon(\Gamma, \mathcal{L}) \leq \left(\frac{\deg_{\mathcal{L}} X}{\sum_{x \in \Gamma} \text{mult}_x X} \right)^{\frac{1}{\dim X}}.$$

Il n'est pas du tout clair a priori qu'il existe une variété telle que l'inégalité dans (1) soit en fait une égalité. Néanmoins le théorème de Campana-Peternell [2] sur le critère de Nakai pour les \mathbb{R} -diviseurs implique qu'il existe toujours une variété V réalisant l'égalité (cf. [4] p. 271 Proposition 5.1.9). Nous renvoyons au livre [4] pour des faits généraux sur la constante de Seshadri. Ce que nous appelons dans cet article constante de Seshadri, est également appelé *multiple point Seshadri constant* dans la littérature cf. par exemple Bauer [1].

Définition 2. Une variété V réalisant l'égalité dans (1) est appelée *variété exceptionnelle de Seshadri de \mathcal{L} relativement à Γ* .

Remarque 2. Notons que si V est une variété exceptionnelle de Seshadri pour \mathcal{L} , alors, par homogénéité de ε , c'est également une variété exceptionnelle de Seshadri pour $\mathcal{L}^{\otimes D}$.

Notations : étant donnée une sous-variété V de X , nous noterons

$$\text{Stab}(V) = \{x \in \mathbb{G} \mid x + V = V\}$$

le *stabilisateur* de V . C'est un sous-groupe algébrique de \mathbb{G} de composante neutre (*i.e.* la composante connexe contenant l'identité) $\text{Stab}(V)^0$. Enfin, étant donnée une sous-variété U de \mathbb{G} nous noterons \overline{U} son adhérence de Zariski dans la compactification X .

Par ailleurs nous noterons u la solution réelle strictement comprise entre 0 et 1 de l'équation $x^{d-1}(1+x) = 1$ avec $d = \dim X$.

Rappelons nos notations : \mathbb{G}/\mathbb{C} est un groupe algébrique commutatif de dimension $d \geq 1$, X une compactification de Serre de \mathbb{G} et Γ un sous-ensemble fini de $\mathbb{G}(\mathbb{C})$ contenant 0 et engendrant un groupe $\Gamma_{\mathbb{Z}}$.

Théorème 1 Soient T et D deux entiers strictement positifs, \mathcal{L} un fibré en droites ample, $S = a_0, a_1, \dots, a_{d-1}$ des entiers strictement positifs ordonnés de façon décroissante et V une variété exceptionnelle de Seshadri de \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$. On suppose que $T > \alpha(S, \mathcal{L}^{\otimes D})$. Soit alors σ une section non nulle de $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$ s'annulant sur l'ensemble $\Gamma(S + a_1 + \dots + a_{\text{codim} V})$ le long de $T_0(\mathbb{G})$ à un ordre supérieur ou égal à $(u + \text{codim} V)T$.

1. Il existe une variété W de dimension comprise entre $\dim V$ et $\dim X - 1$ contenant un translaté de V par un point de $\Gamma(a_1 + \dots + a_{\text{codim} V - 1})$ telle qu'en posant $H = \text{Stab}(W \cap \mathbb{G})^0$ on a

$$T^{\text{codim} H} \text{Card}(\Gamma(a_{\text{codim} V}) + H/H) \deg_{\mathcal{L}}(\overline{H}) \leq (\deg_{\mathcal{L}}(X)) D^{\text{codim} H}.$$

2. Si on suppose de plus que $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ n'est pas de torsion, alors en choisissant

$$\forall i \in \{1, \dots, \text{codim} V\}, \quad |\Gamma(a_i)| > |\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}| (\deg_{\mathcal{L}} X) |\Gamma(S)|^{\frac{\text{codim} V}{d}},$$

on a de plus : le sous-groupe strict H obtenu au point 1. est non nul.

Ce théorème 1 appelle un certain nombre de commentaires et remarques :

1. Pour le point 1. du théorème, plus le nombre

$$\sup\{\dim V / V \text{ variété exceptionnelle de } \mathcal{L} \text{ relativement à } \Gamma(S)\}$$

est grand et meilleur est le résultat .

2. Au vu de la preuve (cf. le lemme 6), on peut en fait remplacer u par une constante un peu meilleure : l'unique solution dans $]0, 1[$ de l'équation $x^{d-1}(x + \text{codim} V) = 1$ où V est la variété exceptionnelle de Seshadri intervenant dans l'énoncé du théorème.
3. Dans le point 2. du théorème il est important de noter que dans les hypothèses faites sur les nombres a_i , on ne fait intervenir que le degré de X relativement à \mathcal{L} et non pas relativement à $\mathcal{L}^{\otimes D}$: le choix des a_i ne dépend pas de D .

Les apports de cet énoncé nous semblent être les suivants :

1. Si l'on se restreint au cas des surfaces, il permet de montrer que toute courbe exceptionnelle de Seshadri donne directement naissance, par passage au stabilisateur, à un sous-groupe obstruteur ; et est elle même un sous-groupe obstruteur si les hypothèses du point 2. sont satisfaites. En dimension quelconque, la variété que l'on construit naturellement, avant de passer au stabilisateur pour obtenir un groupe obstruteur, contient un translaté de variété exceptionnelle de Seshadri.
2. On demande une condition d'annulation plus faible que le classique $dT + 1$: notre condition d'annulation est au pire de la forme $(d - 1 + u)T$ avec $0 < u < 1$. Ceci est dû à l'introduction de la notion de constante et de variété de Seshadri et évidemment n'est rendu possible que par l'hypothèse faite sur l'espace des dérivations : être tout l'espace tangent $T_0(\mathbb{G})$.
3. Dans le cas où l'on part d'un ensemble engendrant un groupe non de torsion, on prouve une version plus forte des lemmes de multiplicités en partant d'une section nulle sur un ensemble plus petit que $\Gamma(dS)$, avec un ordre moins grand que classiquement, et en assurant néanmoins l'existence d'un sous-groupe obstruteur strict *non nul* dans ce cas.
4. Si Γ n'est pas contenu dans \mathbb{G}_{tors} , il suffit pour obtenir les inégalités dans le point 2. du Théorème 1 de choisir les a_i tel que

$$|\Gamma(a_i)| = o(S).$$

Autrement dit, au lieu de supposer que σ s'annule sur $\Gamma(dS)$, il suffit dans ce cas de ne supposer l'annulation que sur $\Gamma(S + o(S))$. En fonction de S , ceci est le meilleur résultat possible.

5. La raison profonde pour laquelle le Théorème 1 ne se généralise pas bien au cas d'un sous-espace quelconque $\mathbb{E} \subset T_0(\mathbb{G})$, est que la notion d'ordre d'annulation le long de \mathbb{E} s'adapte mal à une interprétation géométrique. Autrement dit, alors que la constante de Seshadri $\epsilon(x, \mathcal{L})$ est une fonction homogène de \mathcal{L} , l'analogue qui mesure la positivité de \mathcal{L} le long de \mathbb{E} ne l'est plus.

Ceci étant dit, il convient de tempérer notre résultat : il est en général très difficile de calculer la constante de Seshadri et à plus forte raison de donner des informations sur les variétés exceptionnelles de Seshadri (dont on sait tout de même qu'elles sont au moins de dimension 1).

Dans le cas des surfaces nous pouvons, pour le point 2. du théorème 1 précédent, légèrement affaiblir les hypothèses :

Théorème 2 *On suppose que $\dim X = 2$ et que $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ n'est pas de torsion. Soient $D \geq 1$ un entier, et S , a deux entiers strictement positifs tels que $|\Gamma(S)| \geq |\Gamma(a)| \geq |\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}| \cdot |\Gamma(S)|^{\frac{1}{2}}$. Soient $T > \alpha(S, \mathcal{L}^{\otimes D})$ un entier et $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$ une section non nulle s'annulant à un ordre au moins $\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})T$ sur $\Gamma(S + a)$. Toute sous-variété exceptionnelle de Seshadri de \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$ est l'adhérence d'un translaté de sous-groupe algébrique de dimension 1. De plus, si $E \subset X$ est l'une de ces courbes, alors σ s'annule le long de $\Gamma(a) + E$ à un ordre au moins T et l'on a*

$$T \cdot \text{Card}(\Gamma(a) + E/E) \deg_{\mathcal{L}}(E) \leq D \deg_{\mathcal{L}}(X).$$

Remarque 3. Ce dernier résultat n'est pas une conséquence du théorème 1 précédent dans le cas des surfaces car l'hypothèse faite sur la taille de $\Gamma(a)$ est plus faible que celle du théorème 1 : elle ne fait pas intervenir le degré $\deg_{\mathcal{L}}(X)$. La raison profonde sous-jacente est qu'en dimension 2 la variété obstructrice est nécessairement une hypersurface.

Remarque 4. On explique au paragraphe 7 (cf. notamment le théorème 11) comment traiter en dimension 2 le cas d'un sous-espace \mathbb{E} de dimension 1.

Nous commençons par rappeler la notion de dérivation de sections que nous utiliserons, qui est une notion de dérivation locale. Nous donnons ensuite la preuve du premier théorème en insistant particulièrement sur la proposition 5 qui est le point clé réellement nouveau. Nous réutilisons ensuite cette proposition dans la preuve du second théorème.

Remerciements C'est un plaisir pour les deux auteurs de remercier les universités de Paris VII et de Paris-Sud Orsay qui ont cordialement reçu le premier auteur pendant deux mois, nous permettant ainsi d'accomplir ce travail ensemble.

2 Les dérivations et le théorème de Bézout

Nous utiliserons dans la suite une notion de dérivation locale. C'est cette notion que l'on trouve par exemple introduite dans [7] qui est utilisée dans l'article [5] et qui permet de gagner au niveau des constantes intervenant dans l'inégalité de majoration du degré du groupe obstructeur H . Nous énonçons ensuite le théorème de Bézout que nous utiliserons dans la preuve du théorème 1.

2.1 Dérivations

Soient X une variété algébrique munie d'un fibré en droites \mathcal{L} , σ une section non nulle de $H^0(X, \mathcal{L})$ et D un opérateur différentiel d'ordre 1 sur X , i.e. tel que

$$\forall f, g \in \mathcal{O}_X, \quad D(fg) = D(f)g + fD(g).$$

La dérivée $D(\sigma)$ de σ selon D n'est pas toujours une section bien définie de $H^0(X, \mathcal{L})$. Par contre, pour toute sous-variété Y contenue dans le lieu des zéros $Z(\sigma)$ de σ , il est possible de définir $D(\sigma)$ comme un élément de $H^0(Y, \mathcal{L}|_Y)$. Considérons pour cela une trivialisatoin $\{U_i\}_{i \in I}$ de \mathcal{L} , avec des fonctions de transitions φ_{ij} sur $U_i \cap U_j$, telle que la section σ est donnée sur U_i par des fonctions régulières f_i . On a donc

$$\forall i, j \in I, \quad f_j = \varphi_{ij} f_i.$$

En composant par D on en déduit que sur $U_i \cap U_j$ on a

$$\forall i, j \in I, \quad D(f_j) = D(\varphi_{ij})f_i + \varphi_{ij}D(f_i).$$

On voit ainsi que la condition de recollement n'est pas forcément assurée globalement. Par contre pour toute sous-variété $Y \subset Z(\sigma)$, on obtient bien $D(f_j)|_Y = \varphi_{ij}D(f_i)|_Y$ et ceci nous indique par recollement que l'on a une section bien définie $D(\sigma) \in H^0(Y, \mathcal{L}|_Y)$.

Ceci permet par itération de définir une section $D(\sigma)$ pour tout opérateur différentiel D . La section ainsi construite est bien définie sur toute sous-variété V de X telle que $D_1(\sigma)|_V \equiv 0$ pour tout

opérateur $D_1 \ll D$ avec des notations évidentes (on prend une base de l'espace des opérateurs et on dit que $D_1 \ll D$ si les seuls éléments de la base apparaissant dans D_1 apparaissent aussi dans D et si l'ordre auquel ils apparaissent dans D_1 est inférieur ou égal à celui auquel ils apparaissent dans D et strictement inférieur pour au moins l'un d'entre eux).

2.2 Théorème de Bézout

Nous rappelons ici le théorème de Bézout que nous utiliserons, dans une version que l'on trouve dans Fulton [3] corollaire du paragraphe 12.4.8. Soient D_1, \dots, D_d des diviseurs effectifs sur une variété V de dimension d . Si x est un point isolé de l'intersection de D_1, \dots, D_d sur V , alors on note

$$i(x, D_1 \cdot \dots \cdot D_d; V)$$

la multiplicité d'intersection de x , *i.e.* le coefficient de $[x]$ dans la classe $D_1 \cdot \dots \cdot D_d \cdot V$.

Proposition 3 *Soient D_1, \dots, D_d des diviseurs effectifs sur une variété algébrique V de dimension d . Si x est un point isolé de l'intersection de D_1, \dots, D_d sur V , alors*

$$\text{mult}_x(V) \prod_{k=1}^d \text{mult}_x(D_k) \leq i(x, D_1 \cdot \dots \cdot D_d; V).$$

3 Preuve du point 1. du théorème 1

L'essentiel de l'argument est basé sur la méthode maintenant classique de Philippon [6] avec cependant un ingrédient nouveau qui est l'introduction de la notion de constante de Seshadri. Le point véritablement nouveau étant contenu dans la proposition 5. Schématiquement la preuve est la suivante : on fixe une variété exceptionnelle de Seshadri V de dimension $\dim V \geq 1$ et de codimension $\text{cd}(V)$. En posant $V = V_{\text{cd}(V)}$ et en utilisant que $0 \in \Gamma$, on construit une suite emboîtée de sous-ensembles algébriques de X ,

$$V_{\text{cd}(V)} \subset V_{\text{cd}(V)-1} \subset \dots \subset V_0 = Z(\sigma) \subsetneq X$$

telle que chaque inclusion est avec multiplicité T et telle que

$$\forall k \in \{0, \dots, \text{cd}(V) - 1\} \quad \Gamma(a_{\text{cd}(V)-k}) + V_{k+1} \subset V_k$$

avec là encore des inclusions avec multiplicité T . Par le principe des tiroirs et en oubliant les multiplicités, on en déduit que au moins deux des V_i sont de même dimension, *i.e.* il existe $\text{cd}(V) - 1 \geq k \geq 0$ tel que $\dim V_{k+1} = \dim V_k$. On note i le plus petit entier vérifiant ceci. Le reste de la preuve est ensuite exactement calqué sur la méthode de Philippon, revisitée par Nakamaye : on note W_i une composante irréductible de V_{i+1} de dimension maximale. C'est aussi une composante irréductible isolée de V_i et mieux, $\Gamma(a_{\text{cd}(V)-i}) + W_i$ est une somme de composantes irréductibles isolées de V_i . Utilisant que l'inclusion est avec multiplicité T on construit, en coupant par des diviseurs numériquement équivalents à $\mathcal{L}^{\otimes D}$ un cycle dont le support contient $\Gamma(a_{\text{cd}(V)-i}) + W_i$ avec multiplicité T . Le théorème de Bézout nous donne alors l'inégalité

$$T^{\text{codim } W_i} \deg_{\mathcal{L}^{\otimes D}} (\Gamma(a_{\text{cd}(V)-i}) + W_i) \leq \deg_{\mathcal{L}^{\otimes D}} X.$$

Il ne reste plus ensuite qu'à obtenir le groupe obstruteur. Pour cela on considère le stabilisateur de W_i : c'est une composante isolée de translatés de V_i avec multiplicité T , donc la même application du théorème de Bézout permet de conclure. Le point nouveau ici est que l'on est assuré dans le début de la preuve de démarrer la filtration avec un ensemble $V_{\text{cd}(V)}$ de dimension $\dim V$, alors que dans les preuves classiques la seule information connue était que l'ensemble $V_{\dim X}$ est non-vide. C'est cette nouveauté qui permet de gagner sur les hypothèses concernant l'ordre d'annulation de la section considérée σ . Le reste de l'argument est inchangé par rapport aux preuves de Philippon et Nakamaye.

Lemme 4 Soient X/\mathbb{C} une variété algébrique projective munie d'un fibré en droites ample \mathcal{L} et Γ un ensemble fini de points de X . L'inégalité

$$\varepsilon(\Gamma, \mathcal{L}) \leq \left(\frac{\mathcal{L}^d \cdot V}{\sum_{x \in \Gamma} \text{mult}_x V} \right)^{\frac{1}{d}}$$

est valable pour toute sous-variété V de pure dimension $d \geq 1$ de X , irréductible ou non.

Démonstration : On sait déjà que le résultat est vrai si V est irréductible. On en déduit immédiatement le cas général en utilisant l'inégalité

$$\inf \left\{ \frac{a}{c}, \frac{b}{d} \right\} \leq \frac{a+b}{c+d}$$

valable pour tout entier non nul a, b, c, d . □

Soient $D, T, S, a_1, \dots, a_{\text{cd}(V)}$ des entiers strictement positifs, \mathcal{L} un fibré en droites ample, V une variété exceptionnelle de Seshadri de \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$ et σ une section non nulle de $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$. On pose

$$V_0 = Z(\sigma), \quad V_{\text{cd}(V)} = V, \quad \Gamma_{\text{cd}(V)} = \Gamma(a_1 + \dots + a_{\text{cd}(V)})$$

et pour tout entier k tel que $\text{cd}(V) - 1 \geq k \geq 1$, on pose

$$\Gamma_k = \Gamma(a_{\text{cd}(V)+1-k} + \dots + a_{\text{cd}(V)}) \text{ et } V_k = \{x \in X / \text{mult}_{x+\Gamma_k} \sigma \geq kT + 1\}.$$

Proposition 5 On suppose que la section σ s'annule sur $\Gamma(S) + \Gamma_{\text{cd}(V)}$ à un ordre au moins $(\text{cd}(V) + u)T$ où $u \in]0, 1[$ est un réel tel qu'on a l'inégalité $uT > \varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L}^{\otimes D})$. Dans ce cas on a

$$\Gamma(a_1) + V \subset V_{\text{cd}(V)-1}.$$

De plus il s'agit d'une inclusion avec multiplicité au moins T , i.e.,

$$\Gamma(a_1) + V \subset \bigcap_{\substack{\text{Dop. diff.} \\ \text{d'ordre au plus } T}} \{x \in X / \text{mult}_{x+\Gamma_{\text{cd}(V)-1}} D(\sigma) \geq (\text{cd}(V) - 1)T + 1\}.$$

Démonstration : Soit $s \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$ une section nulle à un ordre au moins uT sur $\Gamma(S) + \Gamma_{\text{cd}(V)}$. Pour tout point $g \in \Gamma_{\text{cd}(V)}$, la section s est nulle à un ordre au moins uT sur $\Gamma(S) + g$, donc la section $t_g^*(s) \in H^0(X, t_g^* \mathcal{L}^{\otimes D})$ est nulle à un ordre au moins uT sur $\Gamma(S)$. Supposons par l'absurde que cette dernière section n'est pas identiquement nulle sur la variété exceptionnelle V .

Considérons tout d'abord le cas plus simple où $\dim V = 1$. Dans ce cas il suffit simplement d'appliquer le théorème de Bézout à l'intersection $Z(t_g^*(s)) \cap V$ pour aboutir à l'inégalité

$$D \deg_{\mathcal{L}}(V) = \deg_{\mathcal{L}^{\otimes D}}(V) \geq Z(t_g^*(s)) \cap V \quad (2)$$

$$\geq \sum_{x \in \Gamma(S)} uT \text{mult}_x(V) = uT \frac{\deg_{\mathcal{L}}(V)}{\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})}. \quad (3)$$

En simplifiant on obtient donc

$$uT \leq D\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L}) = \varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L}^{\otimes D}). \quad (4)$$

Ceci contredit l'hypothèse faite sur u et assure donc que la section s est nulle sur $g + V$ et donc sur $\Gamma_{\text{cd}(V)} + V$.

Dans le cas général d'une variété V de dimension $\dim V \geq 2$ on veut aboutir à la même inégalité pour conclure de la même façon. Malheureusement dans ce cas, une simple application du théorème

de Bézout ne suffit plus et les choses se compliquent un peu. Précisément nous allons utiliser une seconde définition de la constante de Seshadri (voir par exemple [Laz] Definition 5.1.1), équivalente à celle que nous avons donnée : soit $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ l'éclatement de X le long de $\Gamma(S)$, de diviseur exceptionnel E . La constante de Seshadri de \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$ est donnée par la formule

$$\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L}) = \sup \{ \lambda \in \mathbb{R} / \pi^* \mathcal{L} - \lambda E \text{ nef} \}.$$

Fait : pour tout réel $0 < \alpha < \varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})$ le fibré $\pi^*(\mathcal{L})(-\alpha E)$ est ample.

Notons d'abord que $\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L}) > 0$. En effet si $N > 0$ est un entier tel que $\mathcal{L}^{\otimes N}$ est très ample alors $\varepsilon(x, \mathcal{L}^{\otimes N}) \geq 1$ pour tout $x \in X$ et par conséquent $\pi^* \mathcal{L}^{\otimes N} - \varepsilon E$ est ample, donc nef, pour tout $0 < \varepsilon < \frac{1}{|\Gamma(S)|} \leq 1$.

Soit maintenant $0 < \alpha < \varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})$. Par définition de la constante de Seshadri $\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})$ de \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$, le fibré $\pi^* \mathcal{L} - \alpha E$ est nef. Supposons par l'absurde qu'il n'est pas ample. Le théorème de Campana-Peternell [2] sur le critère de Nakai pour les \mathbb{R} -diviseurs nous assure dans ce cas qu'il existe une sous-variété Y de X de dimension $\dim Y \geq 1$ telle que

$$\deg_{\pi^*(\mathcal{L})(-\alpha E)}(\tilde{Y}) = 0,$$

où \tilde{Y} désigne la transformée stricte de Y dans l'éclatement \tilde{X} . Puisque

$$\deg_{\pi^*(\mathcal{L})(-\alpha E)}(\tilde{Y}) = \deg_{\mathcal{L}}(Y) - \sum_{x \in \Gamma(S)} \alpha^{\dim(Y)} \text{mult}_x(Y)$$

on en déduit que si λ est un réel vérifiant $\alpha < \lambda < \varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})$, alors le fibré $\pi^*(\mathcal{L})(-\lambda E)$ n'est pas nef. Ceci contredit la définition de la constante de Seshadri $\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})$ et prouve donc le fait.

Supposons maintenant que $\alpha < \varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})$ est un rationnel strictement positif. On sait par le fait précédent que le fibré $\pi^*(\mathcal{L})(-\alpha E)$ est ample. Soient alors $N > 0$ un entier (dépendant de α) tel que le fibré $\pi^* \mathcal{L}^{\otimes N} - N\alpha E$ est très ample et $E_1, \dots, E_{\dim(V)-1}$ des diviseurs généraux du système linéaire $|\pi^* \mathcal{L}^{\otimes N} - N\alpha E|$. Ces diviseurs étant généraux ils sont lisses et s'intersectent proprement. Par ailleurs le fibré $\pi^* \mathcal{L}^{\otimes N} - N\alpha E$ étant très ample et les diviseurs $E_1, \dots, E_{\dim(V)-1}$ étant généraux, on a : pour toute composante irréductible $W \subset \pi^{-1}(Z(t_g^*(s))) \cap \tilde{V}$ l'intersection

$$E_1 \cap \dots \cap E_{\dim(V)-1} \cap W$$

est propre. En particulier, l'intersection

$$\pi(E_1) \cap \dots \cap \pi(E_{\dim(V)-1}) \cap Z(t_g^*(s)) \cap V$$

est propre. En posant $D_i = \frac{\pi(E_i)}{N}$ pour tout entier i compris entre 1 et $\dim V - 1$ on a par construction

$$\forall x \in \Gamma(S), \quad \text{mult}_x(D_i) \geq \alpha$$

et de plus l'intersection

$$D_1 \cap \dots \cap D_{\dim(V)-1} \cap Z(t_g^*(s)) \cap V$$

est propre.

En utilisant la proposition 3 (théorème de Bézout) dans la variété V et le fait que $t_g^*(\mathcal{L}^{\otimes D})$ est numériquement équivalent au fibré en droites $\mathcal{L}^{\otimes D}$ on obtient, en faisant tendre α vers $\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})$,

$$\sum_{x \in \Gamma(S)} (D\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L}))^{\dim(V)-1} \text{mult}_x(V) uT \leq \deg_{\mathcal{L}^{\otimes D}}(V).$$

De ceci on déduit l'inégalité

$$uT\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})^{\dim(V)-1} \leq \frac{\deg_{\mathcal{L}}(V)}{\sum_{x \in \Gamma(S)} \text{mult}_x(V)} D. \quad (5)$$

La variété V étant une sous-variété exceptionnelle de Seshadri de \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$, nous avons

$$\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L}) = \left(\frac{\deg_{\mathcal{L}}(V)}{\sum_{x \in \Gamma(S)} \text{mult}_x(V)} \right)^{\frac{1}{\dim(V)}}. \quad (6)$$

En combinant les deux formules (5) et (6) précédentes on conclut comme lorsque V était supposée de dimension 1 que

$$uT \leq \varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})D = \varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L}^{\otimes D}).$$

Ceci contredit l'hypothèse de la proposition et prouve donc par l'absurde que $t_g^*(s)|_V = 0$. On en déduit que la section s est nulle sur $g + V$ et donc que s est nulle sur $\Gamma_{\text{cd}(V)} + V$.

Considérons maintenant la section $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$ nulle sur $\Gamma(S) + \Gamma_{\text{cd}(V)}$ à un ordre au moins $(\text{cd}(V) + u)T$. Ce qui précède permet “presque” de déduire que la section $D(\sigma)$ est nulle sur $\Gamma_{\text{cd}(V)} + V$ pour tout opérateur différentiel D d'ordre inférieur à $\text{cd}(V)T$. Autrement dit, au vu de la définition de l'ensemble $V_{\text{cd}(V)-1}$ on a “presque” l'inclusion voulue avec multiplicité au moins T . Il reste à expliquer le “presque” : étant donnée une section $\mathfrak{s} \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$ nulle sur $\Gamma(S) + \Gamma_{\text{cd}(V)}$ à un ordre au moins $(\text{cd}(V) + u)T$, le raisonnement du paragraphe précédent appliqué à \mathfrak{s} permet de conclure que $\Gamma_{\text{cd}(V)} + V \subset Z(\mathfrak{s})$. Donnons nous maintenant une sous-variété (non-nécessairement irréductible) Y de X contenant $\Gamma(S) + \Gamma_{\text{cd}(V)}$ et $\Gamma_{\text{cd}(V)} + V$, et contenue dans $Z(\mathfrak{s})$ (on peut par exemple prendre $Y = Z(\mathfrak{s})$ muni de sa structure de schéma réduit). La variété Y a été choisie telle que pour tout opérateur différentiel D d'ordre 1, $D(\mathfrak{s})$ est une section bien définie de $H^0(Y, \mathcal{L}_{|Y}^{\otimes D})$. On peut donc itérer le raisonnement de la façon suivante : on réapplique l'argument du paragraphe précédent avec la section $s = D(\sigma)$. Notons que cette fois, la section est définie sur Y et non plus sur X . De même la section $t_g^*(s)$ est définie sur $Y_g := t_{-g}(Y)$ et le lieu des zéros $Z(t_g^*(s))$ doit être vu comme étant le lieu des zéros dans $Y_g \subset X$. Ceci étant, la variété Y_g contenant V , le raisonnement reste inchangé. On en déduit que $D(\sigma)$ est nulle sur $\Gamma_{\text{cd}(V)} + V$ et en appliquant ce procédé jusqu'à l'ordre $\text{cd}(V)T$ on en déduit le résultat voulu. \square

Le lemme suivant donne une valeur de u pour laquelle on peut appliquer la proposition 5 précédente.

Lemme 6 *Soient S et T deux entiers strictement positifs, \mathcal{L} un fibré en droites ample, V une variété exceptionnelle de Seshadri de \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$ et u la solution réelle strictement comprise entre 0 et 1 de l'équation $x^{\dim X - 1}(x + \text{codim} V) = 1$. On suppose de plus que $T > \alpha(S, \mathcal{L}^{\otimes D})$ et qu'il existe une section non nulle σ de $H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$ s'annulant à un ordre au moins $(\text{codim} V + u)T$ sur $\Gamma(S)$. Sous ces hypothèses on a*

$$uT > \varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L}^{\otimes D}).$$

Démonstration : On note $d = \dim X$. C'est un simple calcul. On a par définition de $\alpha(S, \cdot)$:

$$\alpha(S, \mathcal{L}^{\otimes D})^d = D^d \alpha(S, \mathcal{L})^d = D^d \frac{\deg_{\mathcal{L}}(X)}{|\Gamma(S)|} = D^{d-1} \frac{\mathcal{L}^{d-1} \cdot Z(\sigma)}{|\Gamma(S)|}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} \varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L}^{\otimes D}) &\leq \left(\frac{\mathcal{L}^{d-1} \cdot Z(\sigma)}{|\Gamma(S)|(\text{codim} V + u)T} \right)^{\frac{1}{d-1}} D \text{ par le lemme 4} \\ &< \alpha(S, \mathcal{L}^{\otimes D}) \left(\frac{1}{u + \text{codim} V} \right)^{\frac{1}{d-1}} \text{ car } T > \alpha(S, \mathcal{L}^{\otimes D}) \\ &< Tu. \end{aligned}$$

\square

Lemme 7 *Avec les notations qui précèdent on a la suite d'inclusions*

$$\forall k \in \{0, \dots, \text{cd}(V) - 1\} \quad \Gamma(a_{\text{cd}(V)-k}) + V_{k+1} \subset V_k$$

et chacune des inclusions avec multiplicité au moins T . De plus le dernier ensemble de la tour d'inclusions (l'ensemble V_0) est strictement inclus dans X .

Démonstration : Le fait que le dernier ensemble de la suite d'inclusions soit strictement contenu dans X résulte de ce que la section σ n'est pas la section nulle. Pour les inclusions correspondant à $0 \leq k \leq \text{cd}(V) - 2$, l'affirmation résulte simplement de la définition des ensembles V_k . Enfin pour $k = \text{cd}(V) - 1$ il s'agit précisément de la proposition 5 précédente. \square

En oubliant les multiplicités on voit que l'on a construit, comme annoncé une tour d'ensembles emboîtés, de dimensions comprises entre $\dim V$ et $\dim X - 1$. De plus cette tour contient exactement $\text{codim} V$ ensembles. Par le principe des tiroirs au moins une des inclusions de la tour correspond à une égalité de dimension. Notons r le plus petit entier vérifiant $\dim V_r = \dim V_{r+1}$. Le reste de la preuve est ensuite exactement calqué sur la méthode de Philippon, revisitée par Nakamaye, et n'apporte rien de nouveau. Nous en donnons une preuve rapide, basée sur [5], au paragraphe suivant.

4 Fin de la preuve du point 1. du théorème 1

Notons W_r une composante irréductible de V_{r+1} de dimension maximale. C'est aussi une composante irréductible isolée de V_r et mieux, $\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r}) + W_r$ est une somme de composantes irréductibles isolées de V_r . En utilisant que l'inclusion est avec multiplicité T nous allons rappeler comment dans cette situation, on construit en suivant la preuve classique des lemmes de zéros, en coupant par des diviseurs numériquement équivalents à $\mathcal{L}^{\otimes D}$ un cycle $C_{\text{codim} W_r}$ dont le support contient $\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r}) + W_r$ avec multiplicité T . Le théorème de Bézout nous donnera alors l'inégalité attendue

$$T^{\text{codim} W_r} \deg_{\mathcal{L}^{\otimes D}} (\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r}) + W_r) \leq \deg_{\mathcal{L}^{\otimes D}} X.$$

Soit $C_1 = Z(\sigma)$. Si $r = 0$ alors toute composante irréductible de $\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r}) + W_r$ est une composante irréductible de C_1 avec multiplicité T et il n'y a rien à faire. On suppose maintenant que $r \geq 1$ et on écrit

$$C_1 = C'_1 + \sum_{i=1}^k a_i Z_i,$$

où les Z_i sont les composantes irréductibles de C_1 d'intersection non vide avec \mathbb{G} et où C'_1 est de support dans le diviseur à l'infini $X \setminus \mathbb{G}$.

Soit Z_i une composante irréductible de C_1 telle que $Z_i \cap \mathbb{G}$ est non-vide.

Lemme 8 *Il existe $x_i \in \Gamma_r$ et un opérateur différentiel D_i d'ordre au plus rT tel que la section $t_{x_i}^*(D_i(\sigma)) \in H^0(Z_i, t_{x_i}^*(\mathcal{L}))$ est bien définie et non nulle sur Z_i .*

Démonstration : Il s'agit du lemme 6 de [5]. \square

Le cas des composantes irréductibles Z de C_1 contenues dans le diviseur à l'infini $X \setminus \mathbb{G}$ (i.e. le cas des composantes irréductibles de C'_1) est un peu plus délicat. Le fibré \mathcal{L} étant ample, il existe un entier $m > 0$ tel que $\mathcal{L}^{\otimes mD}$ est très ample. Ainsi la classe $c_1(mD\mathcal{L}) \cap Z$ est représentée par un cycle effectif E_Z et on a

$$c_1(\mathcal{L}^{\otimes D}) \cap Z = \frac{1}{m} E_Z.$$

On note C'_2 le cycle \mathbf{Q} -effectif ainsi obtenu :

$$C'_2 = \frac{1}{m} \sum_{Z \cap \mathbb{G} = \emptyset} E_Z.$$

Nous pouvons maintenant définir un cycle C_2 de codimension 2 : pour chacune des composantes Z_i d'intersection non vide avec \mathbb{G} , le lemme 8 précédent nous fournit un point $x_i \in \Gamma_r$ et un opérateur D_i d'ordre au plus rT . On pose

$$C_2 = C'_2 + \sum_{i=1}^k a_i Z (t_{x_i}^*(D_i(\sigma))|Z_i).$$

Lemme 9 *On a $C_2 \equiv c_1(\mathcal{L})^2$.*

Démonstration : C'est le lemme 7 de [5]. □

Repartant de C_2 en lieu et place de C_1 , nous pouvons itérer ce procédé jusqu'à atteindre un cycle C_t de codimension $t = \text{codim} W_r$ avec

$$C_t \equiv c_1(\mathcal{L})^t.$$

Par construction, toute composante irréductible de dimension maximale de V_r est une composante irréductible de C_t avec multiplicité T . Ceci est donc en particulier vrai pour les composantes de $\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r}) + W_r$ et le théorème de Bézout nous donne

$$T^{\text{codim} W_r} \deg_{\mathcal{L}}(\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r}) + W_r) \leq \deg_{\mathcal{L}}(X) D^{\text{codim} W_r}. \quad (7)$$

L'inégalité attendue dans la conclusion du point 1. du théorème est donc obtenue, mais avec une variété W_r et non pas un sous-groupe obstruteur comme annoncé. Pour cela introduisons $H = \text{Stab}(W_r)^0$ la composante connexe de l'identité du stabilisateur $\text{Stab}(W_r \cap \mathbb{G})$. Pour tout $x \in \Gamma(a_{\text{cd}(V)-r})$, $x + \overline{H}$ est une composante irréductible de $\bigcap_{y \in W_r \cap \mathbb{G}} t_y^*(V_r)$. Ainsi en repartant du cycle C_t et en continuant la même procédure en intersectant cette fois par des diviseurs de la forme $t_y^*(t_x^*(D(\sigma)))$ (au lieu simplement comme précédemment des $t_x^*(D(\sigma))$) avec $y \in W_r \cap \mathbb{G}$, $x \in \Gamma_r$ et D opérateur différentiel d'ordre au plus rT , on aboutit à un cycle C_h de codimension $h = \text{codim} H$ contenant $x + \overline{H}$ avec multiplicité T pour tout $x \in \Gamma(a_{\text{cd}(V)-r})$. Le théorème de Bézout donne :

$$T^{\text{codim} H} \deg_{\mathcal{L}}(\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r}) + \overline{H}) \leq \deg_{\mathcal{L}}(X) D^{\text{codim} H}. \quad (8)$$

En remarquant que $\deg_{\mathcal{L}}(\Gamma(a_i) + \overline{H}) = \text{Card}(\Gamma(a_i) + H/H) \deg_{\mathcal{L}}(\overline{H})$ ceci conclut.

5 Preuve du point 2. du théorème 1

Pour prouver ce résultat, il suffit de repartir de l'inégalité (7) que l'on a obtenue au paragraphe précédent : il existe un entier r compris entre 0 et $\text{codim} V - 1$ et il existe une variété W_r de dimension inférieure à $\dim X - 1 - r$ contenant un translaté de V par un point de $\Gamma(a_1 + \dots + a_{\text{cd}(V)-r-1})$ (quand $r = \text{cd}(V)$ cette notation représente par convention l'ensemble $\{0\}$) telle que

$$T^{\text{codim} W_r} \deg_{\mathcal{L} \otimes D}(\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r}) + W_r) \leq \deg_{\mathcal{L} \otimes D}(X) = \deg_{\mathcal{L}}(X) D^{\dim X}, \quad (9)$$

Supposons par l'absurde que H soit de dimension 0 autrement dit que $\text{Stab}(W_r \cap \mathbb{G})$ est uniquement constitué de points de torsion. Notons b le nombre de composantes irréductibles de $\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r}) + W_r$. Une telle composante est de la forme $x + W_r$ avec $x \in \Gamma(a_{\text{cd}(V)-r})$. Or

$$\begin{aligned} \text{Stab}(W_r) &= \{x \in \mathbb{G} / x + W_r = W_r\} \\ &\subset \{x \in \mathbb{G} / x + (W_r \cap \mathbb{G}) = (W_r \cap \mathbb{G})\} = \text{Stab}(W_r \cap \mathbb{G}). \end{aligned}$$

Ainsi, si $x, y \in \Gamma(a_{\text{cd}(V)-r})$, on constate que

$$x + W_r = y + W_r \Rightarrow x - y \in \text{Stab}(W_r \cap \mathbb{G}) \cap (\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r}) - \Gamma(a_{\text{cd}(V)-r})).$$

Or ce dernier ensemble est inclus dans $\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}$. En particulier on a la majoration $b \geq \frac{|\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r})|}{|\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}|}$. Revenant aux calculs de degrés, ceci entraine

$$\deg_{\mathcal{L}^{\otimes D}}(\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r}) + W_r) \geq D^{\dim W_r} \frac{|\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r})|}{|\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}|} \deg_{\mathcal{L}}(W_r) \quad (10)$$

$$\geq D^{\dim W_r} \frac{|\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r})|}{|\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}|}. \quad (11)$$

En mettant ensemble les deux inégalités (9) et (11), et en utilisant l'inégalité vérifiée par définition par T (*i.e.* $T \geq \alpha(S, \mathcal{L}^{\otimes D})$), on en déduit que

$$\begin{aligned} |\Gamma(a_{\text{cd}(V)-r})| &\leq |\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}| \deg_{\mathcal{L}}(X)^{\frac{\dim W_r}{\dim X}} |\Gamma(S)|^{\frac{\text{codim } W_r}{\dim X}} \\ &\leq |\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}| (\deg_{\mathcal{L}}(X)) |\Gamma(S)|^{\frac{\text{codim } V}{\dim X}}. \end{aligned}$$

Le choix des a_r permet de conclure par l'absurde.

6 Preuve du théorème 2

Dans la suite nous noterons $j = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5})$ le nombre d'or et \equiv l'équivalence numérique.

Démonstration du théorème 2 : Notons tout d'abord qu'il suffit de prouver le théorème pour $D = 1$. En effet si le résultat est acquis pour $D = 1$, alors en prenant D quelconque et en posant $\mathcal{M} = \mathcal{L}^{\otimes D}$, le résultat appliqué à \mathcal{M} est exactement le résultat voulu (on utilise ici la remarque 2 et le fait que $\deg_{\mathcal{L}^{\otimes D}} V = D^{\dim V} \deg_{\mathcal{L}} V$). On suppose donc désormais que $D = 1$. Si C est une variété exceptionnelle de Seshadri du fibré \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$ alors C est nécessairement de dimension 1. En effet, sinon on aurait $C = X$ et le lemme 4 précédent nous donnerait les inégalités

$$\left(\frac{\mathcal{L}^2}{|\Gamma(S)|} \right)^{\frac{1}{2}} = \varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L}) \leq \frac{\mathcal{L} \cdot Z(\sigma)}{\sum_{x \in \Gamma(S)} \text{mult}_x Z(\sigma)} \quad (12)$$

$$\leq \frac{\mathcal{L}^2}{|\Gamma(S)| j T} \text{ car } 0 \in \Gamma \text{ et } Z(\sigma) \equiv \mathcal{L} \quad (13)$$

$$< \left(\frac{\mathcal{L}^2}{|\Gamma(S)|} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ par hypothèse sur } T > \alpha(S, \mathcal{L}) = \left(\frac{\mathcal{L}^2}{|\Gamma(S)|} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (14)$$

Ceci est impossible. Par ailleurs, l'inégalité (13) nous indique que

$$\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L}) \leq \frac{\alpha(S, \mathcal{L})^2}{j T} < j^{-1} T.$$

Utilisant que $jT = (1 + j^{-1})T$, la proposition 5 appliquée avec $u = j^{-1}$ prouve que la section σ s'annule le long de $x + C$ à un ordre supérieur à T pour tout $x \in \Gamma(a)$ (notons que pour pouvoir parler de $x + C$ nous utilisons ici l'hypothèse faite sur la compactification). On en déduit que $\mathcal{L} - T(\Gamma(a) + C)$ est un diviseur effectif et en intersectant avec \mathcal{L} , ceci produit l'inégalité annoncée.

Il reste à montrer que C est l'adhérence d'un translaté de groupe algébrique. Notons pour cela que

$$\text{Stab}(C) = \{x \in \mathbb{G} / x + C = C\} \subset \text{Stab}(C \cap \mathbb{G}) = \bigcap_{y \in C \cap \mathbb{G}} (y - (C \cap \mathbb{G})).$$

Ainsi, si le groupe $\text{Stab}(C)$ est de dimension 1, il en est de même du groupe $\text{Stab}(C \cap \mathbb{G})$. En particulier $C \cap \mathbb{G}$ est un translaté d'un groupe algébrique de dimension 1, dont l'adhérence est C . On peut donc supposer maintenant que $\text{Stab}(C)$ et même $\text{Stab}(C \cap \mathbb{G})$ est de dimension 0, autrement dit est uniquement constitué de points de torsion. On a pour tout entier $k > 0$ une inclusion de $H^0(A, kT(\Gamma(a) + C))$ dans $H^0(A, k\mathcal{L})$. On en déduit

$$\mathcal{L}^2 \geq T^2(\Gamma(a) + C)^2 > \alpha(S, \mathcal{L})^2(\Gamma(a) + C)^2. \quad (15)$$

Notons b le nombre de composantes irréductibles de $\Gamma(a) + C$. Pour minorer b nous allons majorer le nombre de $x_i, x_j \in \Gamma(S)$ tels que

$$x_i + C = x_j + C.$$

Autrement dit, nous voulons majorer le nombre de $y \in \Gamma(S) - \Gamma(S) \subset \Gamma_{\mathbb{Z}}$ tels que

$$y + C = C.$$

Le stabilisateur de C étant fini par hypothèse, un tel y est nécessairement dans $\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}$. On en déduit une minoration du nombre de composantes irréductibles :

$$b \geq \frac{|\Gamma(a)|}{|\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}|}. \quad (16)$$

En injectant ceci dans l'inégalité (15) et en appliquant l'hypothèse sur a , on obtient

$$\mathcal{L}^2 > \mathcal{L}^2 \frac{C^2 b^2}{|\Gamma(S)|} > \mathcal{L}^2 C^2. \quad (17)$$

Il suffit de noter que $C^2 \geq 1$ pour conclure par l'absurde. En effet, $\text{Stab}(C \cap \mathbb{G})$ est de dimension 0, donc $C \cap \mathbb{G}$ n'est pas un translaté de groupe algébrique et donc

$$C^2 = (C - \eta_1) \cap (C - \eta_2) \supset \text{Stab}(C_{\mathbb{G}})$$

où η_1 et η_2 sont deux points généraux de $C \cap \mathbb{G}$.

7 Cas des dérivations le long d'un sous-espace de dimension 1 dans une surface

On peut se demander ce qui se passe dans le théorème 2 quand le sous-espace $\mathbb{E} \subset T_0(\mathbb{G})$ est de dimension 1. C'est l'objet du théorème 11 ci-dessous.

Notons tout d'abord que la complexité apportée à la preuve ne se trouve pas du côté des dérivations : si D_v est la dérivation correspondant à un vecteur $0 \neq v \in \mathbb{E}$ on a pour toute courbe C ,

$$C \subset Z(\sigma) \Rightarrow \text{mult}_C(D_v(\sigma)) < \text{mult}_C(\sigma),$$

sauf si la courbe $C_{\mathbb{G}}$ est un translaté d'un sous groupe dont l'espace tangent à l'origine est précisément \mathbb{E} .

Le problème vient de ce que une fois que l'on considère la multiplicité le long d'un sous-espace propre, la notion de sous-variété exceptionnelle de Seshadri n'a plus de sens. En effet, pour définir la constante de Seshadri on utilise le fait que l'on peut se donner une résolution simultanée de tous les idéaux de la forme m_x^t où t est un entier, $x \in X$, et $m_x \subset \mathcal{O}_X$ est l'idéal maximal associé au point x . Cette résolution permet de faire varier le diviseur exceptionnel d'une manière continue et la définition de la constante de Seshadri exploite ce fait : en particulier, si $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$ est l'éclatement de X en x , de diviseur exceptionnel E , alors la constante de Seshadri d'un fibré en droites ample \mathcal{L} sur X peut être définie par

$$\varepsilon(x, \mathcal{L}) = \sup_{\alpha \in \mathbf{R}} \{ \pi^*(\mathcal{L})(-\alpha E) \text{ est nef} \}.$$

Quand il s'agit de l'ordre d'annulation d'une section le long d'un sous-espace strict \mathbb{E} , nous pouvons tout de même dire quelque chose : pour tout entier k , soit $\pi_k : X_k \rightarrow X$ une résolution lisse du faisceau d'idéaux

$$\mathcal{I}_k = \bigcap_{x \in \Gamma(S)} \mathcal{I}_{x,k}$$

où $\mathcal{I}_{x,k}$ est engendré par les fonctions régulières f , définies dans un voisinage de x , telles que f s'annule le long de \mathbb{E} à un ordre au moins k . Autrement dit, on fait éclater simultanément chaque idéal $\mathcal{I}_{x,k}$ et puis on prend une résolution de cette variété : en particulier, l'application $\pi_k : X_k \rightarrow X$ est birationnelle et un isomorphisme hors des points $x \in \Gamma(S)$. On note E_k le diviseur exceptionnel de $\pi_k : X_k \rightarrow X$.

Définition 1. Nous pouvons définir un *analogue* de la constante de Seshadri par

$$\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}) = \sup_{k \in \mathbb{N}} \{ \pi_k^*(\mathcal{L})(-E_k) \text{ est nef} \}.$$

On dira que $\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L})$ est la *constante de Seshadri de \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$ et \mathbb{E}* . Par ailleurs on appelle *sous-variété exceptionnelle de Seshadri relativement à $\Gamma(S)$ et \mathbb{E}* toute variété $V \subset X$ telle que

$$(\pi^*(\mathcal{L})(-E_{\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L})+1}))^{\dim(V)} \cdot \tilde{V} < 0$$

où \tilde{V} est la transformée stricte de V dans X_k .

Remarque 5. Il s'agit bien d'un analogue et pas d'une généralisation : quand $\mathbb{E} = T_0(\mathbb{G})$, la constante $\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L})$ est toujours un entier tandis que $\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})$ peut être rationnelle ou même *a priori* irrationnelle. Par contre on voit sur les définitions que l'on a toujours l'inégalité $\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}) \leq \varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})$, avec égalité si et seulement si $\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})$ est un entier.

Remarque 6. Cette notion de constante de Seshadri relative à \mathbb{E} n'est pas, en général, homogène. Autrement dit il n'est pas vrai en général que

$$\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}^{\otimes n}) = n\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}).$$

Cette constante $\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}^{\otimes n})$ peut grossir comme un polynôme en n .

Remarque 7. Il faut en général remplacer \mathcal{L} par $\mathcal{L}^{\otimes d}$ avec $d \gg 0$ pour que $\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L})$ soit non nulle. Ce problème n'existe évidemment pas avec la constante de Seshadri $\varepsilon(\Gamma(S), \mathcal{L})$ qui peut être petite et positive (alors que dans le cas de notre constante relative, une fois que $\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}) < 1$ on a nécessairement $\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}) = 0$).

Nous n'utiliserons pas les remarques précédentes dans la suite.

Lemme 10 *On a l'inégalité*

$$\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}) \leq \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}).$$

Démonstration : Supposons le résultat faux et raisonnons par l'absurde. Dans ce cas il existe un entier $\beta > \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L})$ tel que le fibré $\pi_{\beta}^* \mathcal{L}(-E_{\beta})$ soit nef. Par conséquent on a

$$c_1(\pi_{\beta}^* \mathcal{L}(-E_{\beta}))^2 \geq 0.$$

Soit alors x un point de X et $\pi : Y \rightarrow X$ une résolution de l'idéal $\mathcal{I}_{x,\beta}$ de diviseur exceptionnel E_x . On a

$$\begin{aligned} c_1(\pi_{\beta}^* \mathcal{L}(-E_{\beta}))^2 &= c_1(\pi_{\beta}^*(\mathcal{L}))^2 + c_1(\mathcal{O}_Y(-E_{\beta}))^2 \\ &= c_1(\mathcal{L})^2 + |\Gamma(S)| c_1(\mathcal{O}_Y(-E_x))^2. \end{aligned}$$

D'autre part

$$c_1(\mathcal{O}_Y(-E_x))^2 = -\beta.$$

On en déduit donc

$$\deg_{\mathcal{L}}(X) = c_1(\mathcal{L})^2 \geq |\Gamma(S)|\beta.$$

Le sous-espace \mathbb{E} étant de dimension 1, cette dernière inégalité contredit la définition de $\alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L})$.
□

Nous pouvons maintenant énoncer le résultat principal de ce paragraphe :

Théorème 11 *On suppose que $\dim X = 2$ et que $\Gamma_{\mathbb{Z}}$ n'est pas de torsion. Soient $\mathbb{E} \subset T_0(\mathbb{G})$ un sous-espace de dimension 1, et S , a deux entiers strictement positifs tels que $|\Gamma(S)| \geq |\Gamma(a)| \geq |\Gamma_{\mathbb{Z}, \text{tors}}| \cdot |\Gamma(S)|^{\frac{1}{2}}$. Soient $T > \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}^{\otimes D})$ un entier et $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L}^{\otimes D})$ une section non nulle s'annulant le long de \mathbb{E} à un ordre au moins $T + \varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L})$ sur $\Gamma(S + a)$. Toute sous-variété exceptionnelle de Seshadri de \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$ et \mathbb{E} est l'adhérence d'un translaté de sous-groupe algébrique de dimension 1. Soit E l'une de ces courbes.*

1. Si $T_0(E) \neq \mathbb{E}$ alors σ s'annule sur $\Gamma(a) + E$ à un ordre le long de \mathbb{E} au moins T et on a

$$T \cdot \text{Card}(\Gamma(a) + E/E) \deg_{\mathcal{L}}(E) \leq D \deg_{\mathcal{L}}(X).$$

2. Si $T_0(E) = \mathbb{E}$ alors σ s'annule sur $\Gamma(a) + E$ et on a

$$\text{Card}(\Gamma(a) + E/E) \deg_{\mathcal{L}}(E) \leq D \deg_{\mathcal{L}}(X).$$

Remarque 8. Comme pour le théorème 2, le lemme 10 précédent nous assure que la condition d'annulation demandée : $T + \varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}) \leq T + \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L}) < 2T$ est plus faible que la condition classique $2T + 1$. Par ailleurs comme l'indique la preuve, l'hypothèse sur la taille de a par rapport à S (qui est la même hypothèse que celle faite dans le théorème 2) n'intervient que pour prouver que la courbe exceptionnelle est l'adhérence d'un groupe algébrique, autrement dit pour prouver que le groupe obstructeur qui intervient est *non nul*. Cette hypothèse n'intervient pas dans la preuve de l'inégalité numérique sur le degré de la courbe obstructrice.

La preuve est calquée sur celle du théorème 2. On constate tout d'abord que l'on peut là encore supposer $D = 1$. Ce que l'on fait désormais. Ensuite il faut adapter la proposition 5 à notre nouveau cadre (dérivation le long d'un sous-espace de dimension 1) : c'est l'objet du lemme qui suit. Soit $C \subset X$ une courbe qui est une sous-variété exceptionnelle de Seshadri relativement à $\Gamma(S)$ et \mathbb{E} . Il y a deux possibilités : soit C est un translaté d'un sous-groupe $H \subset G$ avec $T_0(H) = \mathbb{E}$; soit ce n'est pas le cas. La raison pour laquelle le cas des translatés est particulier est que si la section $\sigma \in H^0(X, \mathcal{L})$ s'annule sur un tel translaté alors son ordre d'annulation le long de \mathbb{E} est infini.

Lemme 12 *Soient T, S, a trois entiers strictement positifs, \mathcal{L} un fibré en droites ample et σ une section non-nulle de $H^0(X, \mathcal{L})$. Supposons que σ s'annule le long de \mathbb{E} à un ordre $\geq T + \varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L})$ sur $\Gamma(S + a)$ et notons C une courbe exceptionnelle de Seshadri de \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$ et \mathbb{E} . Alors σ s'annule le long de \mathbb{E} à un ordre au moins T sur $\Gamma(a) + C$.*

Démonstration : Montrons d'abord que σ s'annule sur $\Gamma(a) + C$. Posons $\varepsilon = \varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L})$. Soit $g \in \Gamma(a)$. Par hypothèse on sait que $s = t_g^*(\sigma)$ est nulle sur $\Gamma(S)$ le long de \mathbb{E} à un ordre au moins $\varepsilon + 1$. Autrement dit, le diviseur $\pi^*(Z(s)) - E_{\varepsilon+1}$ est effectif et par conséquent en intersectant avec \tilde{C} , on en déduit que cette intersection est positive, sauf si \tilde{C} est une composante de ce diviseur. Or par la définition de $\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L})$ et le fait que C est une courbe exceptionnelle de Seshadri de \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$ et \mathbb{E} on a,

$$(\pi^*(Z(s)) - E_{\varepsilon+1}) \cdot \tilde{C} \equiv \pi_{\varepsilon+1}^* \mathcal{L}(-E_{\varepsilon+1}) \cdot \tilde{C} < 0.$$

Ceci prouve donc que \tilde{C} est une composante de $\pi^*(Z(s))$ et donc que s s'annule sur C . Autrement dit σ s'annule sur $\Gamma(a) + C$.

Soient $v \in \mathbb{E}$ un vecteur non nul de dérivation correspondante $D_{\mathbb{E}}$, $i < T$ un entier et $x \in \Gamma(a)$. Supposons que $D_{\mathbb{E}}^i(\sigma)|(x + C)$ est une section bien définie de $H^0(x + C, \mathcal{L})$. Localement la section

$D_{\mathbb{E}}^i(\sigma)$ s'identifie avec une fonction régulière f qui s'annule le long de \mathbb{E} sur $x + \Gamma(S)$ à un ordre au moins $\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}) + 1$. La courbe C étant une courbe exceptionnelle de Seshadri de \mathcal{L} relativement à \mathbb{E} et $\Gamma(S)$, on en déduit que f s'annule identiquement sur $x + C$. \square

Nous pouvons maintenant donner la preuve du théorème 11 : *Démonstration* : Notons $\varepsilon = \varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L})$. L'existence d'une section σ nulle sur $\Gamma(S)$ à un ordre au moins $T > \alpha(S, \mathbb{E}, \mathcal{L})$ entraîne que $\varepsilon_{\mathbb{E}}(\Gamma(S), \mathcal{L}) < \alpha$. Or ceci implique que $\pi^*(\mathcal{L}(-E_{\varepsilon}))^2 > 0$ et donc que X n'est pas une sous-variété exceptionnelle de Seshadri de \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$ et \mathbb{E} . Ainsi toute variété exceptionnelle est une courbe. Soit $C \subset X$ une courbe qui est une sous-variété exceptionnelle de Seshadri pour \mathcal{L} relativement à $\Gamma(S)$ et \mathbb{E} . Si $C \cap \mathbb{G}$ est un sous-groupe de \mathbb{G} avec $T_0(C) = \mathbb{E}$ il n'y a rien à montrer : d'après le lemme 12 la section σ s'annule sur $\Gamma(a) + C$ d'où l'inégalité. Supposons donc que $C \cap \mathbb{G}$ n'est pas un translaté d'un sous-groupe dont l'espace tangent à l'origine est \mathbb{E} . Dans ce cas, si $\eta \in C$ est un point général alors $T_{\eta}(C) \neq \mathbb{E}$ et par conséquent la dérivation $D_{\mathbb{E}}$ est transverse à C et à toutes ses translatées. Par le lemme 12, on voit que l'hypothèse sur l'ordre d'annulation de σ le long de \mathbb{E} sur $\Gamma(a + S)$ garantit que, pour tout entier $i < T$, la section $D_{\mathbb{E}}^i(\sigma)$ s'annule sur $\Gamma(a) + C$. Ainsi le diviseur

$$Z(\sigma) - T \sum_{x \in \Gamma(a)} (x + C)$$

est effectif. On en déduit l'inégalité annoncée dans le théorème 11. Quant au fait que dans ce cas $C \cap \mathbb{G}$ est un sous-groupe, la preuve est la même que celle (du même fait) du théorème 2. C'est dans cette partie uniquement qu'est utilisée l'hypothèse faite sur la taille de a relativement à celle de S . \square

Références

- [1] T. Bauer. Seshadri constants on algebraic surfaces. *Math. Ann.*, 313(3) :547–583, 1999.
- [2] F. Campana and T. Peternell. Algebraicity of the ample cone of projective varieties. *J. Reine Angew. Math.*, 407 :160–166, 1990.
- [3] W. Fulton. *Intersection Theory*. Springer, second edition, 1998.
- [4] R. Lazarsfeld. *Positivity in algebraic geometry. I*, volume 48 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2004.
- [5] M. Nakamaye. Multiplicity estimates on commutative algebraic groups. À paraître à Crelle's Journal, 2006.
- [6] P. Philippon. Lemmes de zéros dans les groupes algébriques commutatifs. *Bull. Soc. Math. France*, 114(3) :355–383, 1986.
- [7] L. Szpiro. Sur les solutions d'un système d'équations polynomiales sur une variété abélienne (d'après G. Faltings et P. Vojta). *Astérisque*, (189-190) :Exp. No. 729, 429–446, 1990. Séminaire Bourbaki, Vol. 1989/90.
- [8] M. Waldschmidt. Nombres transcendants et groupes algébriques. *Astérisque*, (69-70) :218, 1987. Avec des appendices de Daniel Bertrand et Jean-Pierre Serre.